بعض التطبيقات الفيزيائية للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

إيمان العجيلي دامان

كلية التقنية الهندسية- جنزور
Eman.damann@gmil.com

ليلي علي القرازي

كلية التقنية الهندسية- جنزور
laila.gerazi@gmail.com

الملخص:

قمنا في هذا البحث بعرض مفاهيم أساسية للمعادلة التفاضلية من حيث الرتبة والدرجة والتصنيف، والتعرف على الحل العام والخاص لهذه المعادلات، فوضحنا المعادلة التفاضلية الخطية، ثم تطرقنا إلى المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة، وطرق حلولها باستخدام فصل المتغيرات، تغيير الثوابت والعامل التكاملي، كما قمنا بتطبيق برنامج رياضي لحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من الرتبة الأولى، وتمثيلها في منحنيات واستخدامها في الخصائص الفيزيائية المتمثلة في قانون نيوتن للتبريد (النظام الحراري) وقوانين الحركة (النظام الميكانيكي)، ومناقشتها على شكل منحنيات تدرس العلاقة بين درجة الحرارة والزمن.

الكلمات الافتتاحية: المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة، درجة الحرارة، الزمن.

Abstract:

In this research, we presented basic concepts of the differential equation in terms of rank, degree and classification, and to identify the general and specific solutions of these equations, we defined the linear differential equation, we touched on the homogeneous and heterogeneous linear differential equation, and the methods of its solutions using the separation of variables, changing the constants and the integrative factor, and we are applying
a mathematical program to solve homogeneous and inhomogeneous linear differential equations of the first order, represent them as mathematical models and use them in the physical properties represented in Newton's law of cooling (thermal system) and laws of motion (mechanical system), and discussion in the form of curves

studying the relationship between time (t) temperature and degree (T).

Key word: Homogeneous and inhomogeneous linear differential equations, Temperature, Time.

المقدمة:

للمعادلات التفاضلية أهميه كبيرة في تطبيقاتها التي تمثل العلوم والمعرفة كافة، فهي حلقة وصل بين الرياضيات والعلوم الأخرى، مثل الفيزياء والهندسة التحليلية والكيمياء وغيرها، حيث نجد العديد من المسائل في العلوم الفيزيائية تصاغ رياضيا على شكل معادلات تفاضلية، ولفهم هذا النوع من المسائل كان لابد من تصنيف المعادلات التفاضلية إلى خطية متجانسة وغير متجانسة [1]، فالمعادلات التفاضلية الخطية ذات الشروط الابتدائية المعطاة من ابرز عناوين التمثيل الرياضي، والذي يتم بناؤه لمعرفة وتحديد الظواهر العلمية بما في ذلك مصادر المعلومات المتعلقة بها، إن بناء وتشكيل النموذج الرياضي والذي يتكون من الأفكار الرياضية مثل الثوابت والمتغيرات والدوال والمعادلات الرياضية الجبرية أو التفاضلية يتم بتحديد قيم هذه المتغيرات الداخلية التي تحكم أداء العملية، ووضع الاقتراحات التي تحكم هذه المتغيرات ثم إيجاد العلاقات الرياضية التي تربط بينها، هذه العلاقات تأخذ أشكال مثل المعادلات التفاضلية، المعادلات التكاملية، القوانين التجريبية وغيرها، وبحل هذا النوع نحصل على تصور واضح لخواص وطبيعة العملية [2]، فالمعادلة التفاضلية هي علاقة بين دالة ومشتقاتها (متغيرين احدهما مستقل والأخر تابع)، ولها نوعان هما معادلة تفاضلية عادية وتعتمد على متغير واحد ومعادلة تفاضلية جزئية تعتمد على أكثر من متغير، ورتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة، أما درجتها فهي درجة (أس) أعلى مشتقة في المعادلة، بشرط أن تكون المعادلة خالية من الأسس الكسرية، ومن أهم صورها المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الأولى[8، 1]، والتي من أشكالها:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

$$M\,(x\,,y)dx + N\,(x\,,y\,)dy = 0 \tag{2}$$

وللمعادلة التفاضلية نوعان من الحلول هما: الحل العام وهو مجموعة كل الحلول الممكنة للمعادلة التفاضلية ويحتوي على ثوابت التكامل، أما النوع الثاني فهو الحل الخاص ونحصل عليه بمعرفة المتغير المستقل والمتغير التابع [1، 5]، فالشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هي:

$$\frac{dy}{dx} = f(x\,,y) \qquad (3)$$

$$dy = f(x)dx \qquad (4)$$

حيث $f\,(\,x\,)$ مشتقة الدالة $y\,(\,x\,)$ والمطلوب إيجاد دالتها الأصلية.

1- طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

المعادلتين (3)، (4) من ابسط المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ويمكن حلها كتالي:

$$y = \int f\,(\,x\,)dx + c$$

ومن أهم صورها:

$$\frac{dy}{dx} + P\,(\,x\,)y = Q\,(x\,) \qquad (5)$$

وتسمى خطية في y حيث $P\,,Q$ دالتان في x، فاذا كانت $Q\,(x\,) = 0$ تسمى معادلة خطية مجانسة، اما اذا كانت $Q\,(x\,) \neq 0$ فتسمى معادلة خطية غير متجانسة[6].

ويكون حل المعادلة الخطية المتجانسة باستخدام طريقة فصل المتغيرات كتالي:

$$\frac{dy}{dx} + P\,(\,x\,)y = 0$$

$$\frac{d\,y}{y} + P\,(\,x\,)dx = 0$$

$$\frac{d\,y}{y} = -\,P\,(\,x\,)dx$$

$$ln\,y = -\int P\,(\,x\,)dx + ln\,c$$

$$ln\,y - ln\,c = -\int P\,(\,x\,)dx$$

$$ln\frac{y}{c} = -\int P\,(\,x\,)dx$$

$$\frac{y}{c} = e^{-\int P\,(x\,)dx}$$

$$y = c\,e^{-\int P(x)dx} \qquad (6)$$

وتمثل المعادلة (6) الحل العام للمعادلة المتجانسة، أما المعادلة الخطية غير المتجانسة فيمكن إيجاد الحل أما عن طريق تغيير الثوابت، ويتم فيه وضع الثابت c في الحل العام للمعادلة المتجانسة (6) كدالة في x [3، 7].

$$y = c(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{7}$$

وتمثل المعادلة (7) الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة وبتفاضل (7) نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}\, e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{8}$$

نعوض من (7)، (8) في المعادلة (5) نجد أن

$$\frac{dc}{dx}\; e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dc}{dx}\; e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dc}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

أي أن

$$c(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + c$$

بالتعويض عن $c(x)$ في (6)

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + c\right] \tag{9}$$

وتمثل (9) الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة وهو عبارة عن مجموع حلين أحدهما الحل العام (6) والأخر الحل الخاص (8) أي أن:

$$y = y_n + y_p$$

أما الطريقة الأخرى لحل المعادلة الخطية غير المتجانسة هي العامل التكاملي، ويتم فيها كتابة المعادلة (5) على الصور:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \tag{10}$$

وبالتالي يكون العامل التكاملي هو

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

وبضرب طرفي المعادلة (5) في العامل التكاملي نجد أن:

$$\mu\,\frac{dy}{dx} + \mu\; p(x)y = \mu\, Q(x) \tag{11}$$

ومن الواضح أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة تفاضل تام، وبالتالي نستطيع كتابة المعادلة الأخيرة على الصورة

$$d\,(\mu\, y) = \mu\, Q(x)$$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة (5).

$$\mu\, y = \int \mu\, Q(x)\, dx + c, \mu = e^{\int P(x) dx} \qquad (12)$$

حيث c ثابت اختياري.

يمكن تطبيق هذه المعادلات على القوانين الفيزيائية [8، 4].

2- تطبيقات المعادلات التفاضلية في الخصائص الفيزيائية:

هناك بعض المعادلات الخطية للانتقال الحراري، حيث تشمل معادلات الانتقال الحراري بالحمل والإشعاع على دالات غير خطية لدرجة الحرارة التي تجعل حل مسائل الانتقال الحراري صعبا، لنأخذ بعين الاعتبار الحرارة المتنقلة من السطح الماص إلى المحيط في لوح مستوي مزجج بزجاجة واحدة، ففي حالة الاتزان فان الانتقال الكلي من اللوح إلى الزجاجة يجب أن يساوي الانتقال من الزجاجة إلى المحيط، لذلك نستطيع أن نستخدم عدة معادلات في العديد من التطبيقات الفيزيائية للإشعاع الحراري والمعادلة التالية يمكن استخدامها في التطبيقات.

بفرض أن المعادلات تتغير ببطء مع درجة الحرارة [9]، فان

$$J = h_\infty\left(T_g - T_a\right) + h_\infty^r\left(T_g - T_{sky}\right)$$

حيث T_g درجة حرارة الزجاجة، T_a درجة حرارة المحيط، T_{sky} درجة حرارة السماء، h_∞ معامل الحمل الحراري، h_∞^r معامل الإشعاع الحراري.

أ – درجة الحرارة

ينص قانون نيوتن للتبريد على أن "معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب طرديا مع الفرق في درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به". ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد كالتالي [9، 11].

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_A) \qquad (13)$$

ثابت الموصلية $\frac{dT}{dt}$ معدل تغير درجه الحرارة بالنسبة لزمن، T_A درجة حيث kالحرارية يعتمد على نوع العازل،
درجة حرارة الوسط المحيط، $T\ (t)$ درجة حرارة الجسم بالنسبة للزمن.

الجدول (1) يوضح التوصيلية الحرارية لمواد مختلفة لقيم k [9]

المواد	$k \quad {}^{w}/_{m.c^\circ}$
ألمونيوم	205
النحاس	385
الرصاص	347
الزئبق	8.37
الفضة	406
الفولاذ	50.2
الطوب	0.147
الاسمنت	0.8
الفلين	0.04
الحديد	0.04
الزجاج	0.8
الصوف الصخري	0.04
الخشب	0.14
الهواء	0.0239
الهليوم	0.142
الهيدروجين	0.142

فالصيغة الرياضية لقانون نيوتن التجريبي لتبريد جسم هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات، فإذا كان لدينا جسم ساخن ونريد زيادة درجة حرارته، فمن الطبيعي أن يكتسب طاقة حرارية من المحيط، لنفرض أن الجسم يبرد ثم ينخفض درجة حرارته ويفقد الحرارة، ويمكن تطبيق قانون نيوتن للتبريد لمعادلة الاضمحلال الآسي (درجة حرارة الجسم مع الزمن) [10، 8]. ويمكن اشتقاق المعادلة الآتية:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_A)$$
$$\frac{dT}{(T - T_A)} = k\ dt$$
$$ln|T - T_A| = kt + c_1$$
$$|T - TA| = e^{kt+c_1}$$
$$T\ (t) = T_A + C_2\ e^{kt} \tag{14}$$

والمعادلة (14) تمثل قانون نيوتن للتبريد، حيث c_1 , c_2 ثوابت.

عندما

$$\lim t \rightarrow \infty \qquad ,k < 0$$

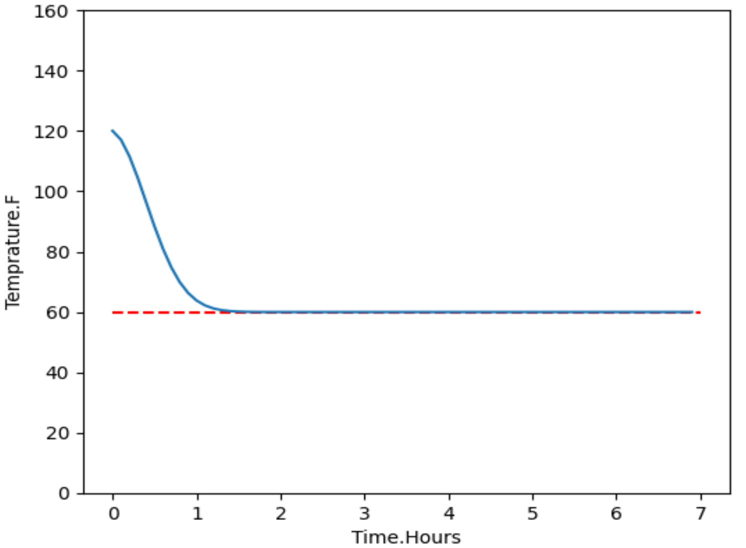
فان

$$e^{kt} = 0$$

وهذا يدل علي أن درجة حرارة الجسم تقترب من درجة حرارة المحيط مع مرور الزمن ويمكن تطبيق الشروط على المعادلة (14) نحصل علي الاتي:

$$T(0) = T_0 = T_A + c_2 e^{kt}$$
$$T(0) = T_0\ , \quad c_2 = (T_0 - T_A)$$
$$T(t) = T_A + (T_0 + T_A)e^{kt} \tag{15}$$

والمنحني التالي أدناه، يوضح العلاقة بين درجة حرارة الجسم مع الزمن كمنحني تبريد كما موضح بالشكل (1)، حيث $\frac{dT}{Dt}$ يوضح ميل المماس للمنحنى في أي زمن ويعطي معدل انخفاض درجة الحرارة [9، 11].



الشكل (1) يوضح منحني التبريد لدرجة الحرارة مع الزمن

مثال 1:

لنفرض سائل حرارته $T_0 = 120C^\circ$ ودرجة حرارة الغرفة $T_A = 60\ C^\circ$ ،

عند زمن قدره

$t = 0$. ويمكن وصف القيم بالمعادلة الأتية: $k = -\ 0.5$

$$\frac{dT}{dt} = -0.5\ (T\ -\ 60)$$

$$T_0 = 90\ c^\circ$$

$$T\ (t) = \ T_A + (\ T_0 - \ T_A\ )\ e^{-0.5t}$$

T_A درجة حرارة المحيط، T_0 درجة حرارة السائل في زمن قدره $t = 0$ ،

الحرارية للعازل يعتمد على نوع المادة حيث $T\ (t)$درجة الحرارة مع الزمن،

k ثابت الموصلية وقيمته بالسالب.

مثال 2:

إذا وضعنا قطعه من اللحم في فرن وتم قياس درجه حرارتها $300\ F^\circ$ ثم أخرجت هده القطعة بعد ثلاثة دقائق وكانت درجة حرارتها $200\ F^\circ$ فكم من الوقت ليستغرق اللحم للتبريد إلي درجة حرارة الغرفة $70\ F^\circ$.

عندما

$$t = 0 \quad , \quad T_A = 70\ F^{\circ}\ , T = 300F^{\circ}$$

$$T\ (t) = T_A + (\ T_0 - \ T_A)\ e^{kt}$$

أي قيمة الثابت عندما نطبق الشروط هي $c_2 = 230$.

وعندما

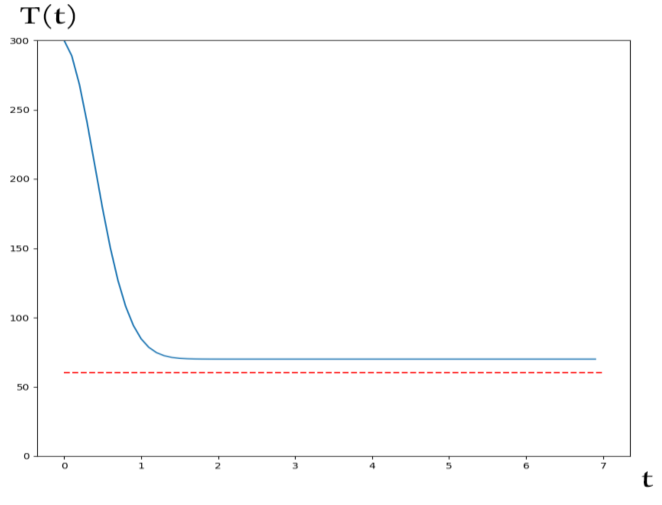
$$t = 3, \quad T_A = 200\ F^{\circ}$$

فان

$$T\ (3) = 200 + 230\ \ e^{3k} \Longrightarrow e^{3k}\ = \frac{130}{230}$$

$$k\ = (1/3)\ ln(\frac{13}{23}) = -0.19018,\ \ 3\ k = ln(13/23)$$

وهذه المعادلة تمثل الحل عندما $\lim_{t\to\infty} T(t) \ = \ 70F^{\circ}$.



الشكل (2) يبين القيم لدرجة الحرارة مع الزمن عندما الزمن يؤول إلى مالانهاية

مثال 3:

أما إذا وضع جسم درجة حرارته مجهولة في ثلاجة درجة حرارتها ثابتة وتساوي $-20\ \ c^{\circ}$ بعد نصف ساعة أصبحت درجة حرارة الجسم $10\ \ c^{\circ}$ وبعد نصف ساعة أصبحت درجة الحرارة للجسم $-10\ \ c^{\circ}$ فما هي درجة الحرارة الابتدائية للجسم

والزمن اللازم لكي تكون درجة حرارة الجسم $T = -190\ c^{\circ}$ وبتطبيق معادله رقم (13) نحصل على الأتي [10، 3]:

$$\frac{dT}{dt} + kT = k\,T_s$$
$$T_s = T_A$$
$$\frac{dT}{dt} = kT = -20\,k$$

وان المعادلة الخطية يمكن تطبيقها على النحو التالي:

$$k(t) = -20k, \qquad P(t) = k$$

فان عامل التكامل

$$(I.F) = \mathrm{e}^{kdt} = \mathrm{e}^{\int kdt}$$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(I.F)\,T = \int (I.F)\,Q_{(t)}dt + c$$
$$e^{kt}\,T = \int e^{kt}\,(-20k)\,dt + c$$
$$T = -20 + \mathrm{c}\,\mathrm{e}^{-kt}$$
$$e^{kt}\,T = -20\,e^{kt} + c$$

عندما

$t = 0$

فان

$$T_0 = -20 + c\,, \quad c = T_0 + 20 \qquad (16)$$

وعندما

$t = 30$

فان

$$10e^{30k} = -20e^{30k} + c$$
$$c = 30\ \mathrm{e}^{30k} \qquad (17)$$

وعندما

$t = 60$

فان

$$-10\ \mathrm{e}^{60k} = -20\ \mathrm{e}^{60k} + c$$
$$c = 10\,e^{60k} \qquad (18)$$

بقسمة المعادلة (17) على (18) نحصل على الأتي:

$$1 = 3\,e^{-30k} \implies e^{-30k} = 1/3$$

$$30k = ln\,3 \Rightarrow k = 0.0366$$

نعوض بـ $30\,k$= $ln\ 3$ في المعادلة (13) فنحصل على

$$T_0 \ = -20 + c\,,\quad c = 20 + 70 = 90$$

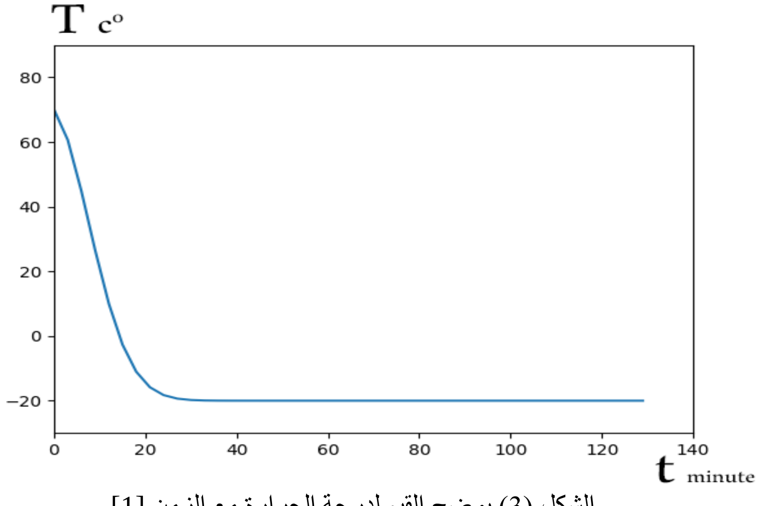
وبهذا تصبح العلاقة بين درجة حرارة الجسم والزمن

$$T = 90\,e^{-0.0366t} - \ 20$$

والزمن اللازم لكي تكون درجة حرارة الجسم $\left(-19\,c^{\circ}\right)$

$$-19 = 90e^{-0.0366t} - 20 \Rightarrow e^{-0.0366t} \quad = 1/90$$

$$-0.0366\,t = -\,ln\ 90;\ t = 123\ \text{min.}$$



الشكل (3) يوضح القيم لدرجة الحرارة مع الزمن [1]

ب- الجسم الساقط

إذا اعتبرنا جسما كتلته m ساقطا من اعلي متأثرا بالجاذبية g و مقاومة الهواء التي تتناسب طرديا مع سرعة الجسم، ولنفرض إن كل من الجاذبية الأرضية والكتلة ثابتان وباستعمال قانون نيوتن الثاني للحركة الذي ينص علي أن "محصلة القوي المؤثرة علي جسم تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة مضروبا بالكتلة الثابتة" [8].

$$F = m\,\frac{dv}{dt} \qquad (19)$$

mكتلة لجسم ، $\frac{dv}{dt}$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم، F سرعة الجسم بالنسبة للزمن.

فإذا كان لدينا قوتان تؤثران على الجسم الأول وزن الجسم $w = \ m\,g$ والثانية $-kv$ قوة مقاومة الهواء والإشارة السالبة تدل على أن اتجاه القوة عكس اتجاه السرعة، حيث k معامل احتكاك الهواء، وان محصلة القوى كالأتي [8,10]:

حيث $k \leq 0$

$$F = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}\,v = g \qquad (20)$$

فعند تطبيق المعادلة (20) على جسم ساكن كتلته $5\ kg$ من ارتفاع $100\ \ \mathrm{m}$ لحساب الزمن اللازم لوصوله إلي الأرض، بفرض عدم مقاومة الهواء وإذا كانت مقاومه الهواء ثمن سرعة الكرة، فيمكن استخدام المعادلة (20) كتالي [12,10].

$$\frac{dv}{\mathrm{dt}} = 9.8\ \ {}^{m}/{}_{s^2} \Longrightarrow v = 9.8\,t + c$$

وبما أن الجسم ساكن فان

$$c = 0,\ \ v = 0,\ \ t = 0,$$

لذالك فان معادلة الحركة تصبح

$$v = 9.8\,t$$

$$\frac{ds}{dt} = 9.8\,t$$

$$ds = 9.8t\ dt$$

$$s = 4.9\,t^2 + \ c$$

وان الجسم ساكن عند

$$c = 0,\quad t = 0,\quad s = 0$$

فان

$$s = \ 4.9\,t^2$$

لذا فان الزمن اللازم لوصول الجسم إلى الأرض هو:

$$t = \sqrt{\frac{s}{4.9}} = \sqrt{\frac{100}{4.9}} = 4.5\mathrm{sec}$$

وبتطبيق المعادلة (20) نحصل علي:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{8{\times}5}\ v\ \ = 9.8$$

ويمكن فصل متغيرات المعادلة التفاضلية

$$\frac{dv}{9.8-0.025v}=dt$$
$$t\ =\frac{-1}{0.025}\ ln|9.8-0.025v|+\mathrm{c}$$
$$t=-40\ ln|9.8-0.025v|+\mathrm{c}$$
وعليه فان $t=0$ تكون $v=0$ عند
$$0=-40\ \ ln\ 9.8\ +\ c\quad ,\quad c=91.3$$
$$ln|9.8-0.025\ v|=0.025(91.3-t)$$
$$9.8-0.025v=\ e^{0.025(91.3-t)}$$
$$v=40\left(9.8\ -e^{0.025(91.3-t)}\right)$$
$$\frac{ds}{dt}=40\left(9.8-\ e^{0.025(91.3-t)}\right)$$
$$ds=40\left(9.8-\ e^{0.025(91.3-t)}\right)dt$$
$$s=40\left(9.8t+40e^{0.025\ (91.3-t)}\right)+\ c_1$$
عند $t=0$ تكون $s=0$ لذا
$$0=40\left(9.8\ \times 0+40e^{0.025(91.3-0)}\right)+c_1$$
$$c_1=\ -15681.844$$
$$s=40\left(9.8t+40e^{0.025(91.3-t)}\right)-\ 15681.844$$
ولإيجاد الزمن اللازم لوصول الجسم إلى الأرض
$$100=40\left(9.8-\ e^{0.025(91.3-t)}\right)-15681.8$$
$$394.546=9.8t+40\ e^{0.025(91.3-t)}$$
$$9.864=0.245t+\ e^{0.025(91.3-t)}$$
ولإيجاد قيمة t من المعادلة الأخيرة نعتبر
$$\mathrm{e}^{0.025(91.3-\mathrm{t})}\rightarrow 0$$
$$t=40.26\ \mathrm{sec.}$$

الاستنتاج:

من خلال هذا البحث تمكنا من إبراز أهمية المعادلات التفاضلية العادية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة في حل المسائل الفيزيائية، فمن خلال معالجة بعض التطبيقات تمكنا من ربط العلوم الرياضية بالفيزيائية عن طريق نماذج رياضية، فالنموذج الرياضي المعتمد لهذا البحث يدرس العلاقة لدرجة الحرارة $T(t)$ بالنسبة للزمن، أي أن
$$T(t)=\ \frac{dT}{dt}=k(T-\ T_A)$$

ففي الشكل (1) عند زمن قدره صفر نلاحظ ارتفاع درجة حرارة الجسم $120F^{\circ}$، ويستمر الانخفاض لدرجة الحرارة مع ارتفاع الزمن إلي أن تصل إلي درجة الحرارة $60F^{\circ}$، وهذا يدل علي وجود الدالة الآسية في التناقص بحيث تعطي شكل المنحني للتبريد، كما يوضح ميل المماس المنحني في أي زمن ويعطي معدل انخفاض درجة الحرارة بالنسبة لزمن، أما بالنسبة لشكل (2) يوضح القيم الأولية لدرجة الحرارة مع الزمن عندما $\lim_{t\to\infty} T(t) = 70\, c^{\circ}$، أما بالنسبة لشكل (3) نلاحظ اعلي قيمه لهذا المنحني عند زمن قدره صفر فان درجة الحرارة $70\ \ c^{\circ}$، وكلما تناقصت درجة الحرارة يزداد الزمن، وعند نصف ساعة فان درجة الحرارة $10c^{\circ}$ وعند زمن قدره ساعة تتناقص درجة الحرارة إلي أن تصل إلي $-10\ c^{\circ}$ وهكذا إلي أن تصل إلي زمن قدره 123 دقيقه وتكون درجة الحرارة $-19c^{\circ}$ فمن خلال دراستنا لهذه المنحنيات نلاحظ وجود علاقة عكسية بين درجة الحرارة والدالة الأسية لزمن.

الخلاصة:

تحتوي هذه الورقة على بعض المفاهيم الأساسية للمعادلة التفاضلية من حيث الرتبة والتصنيف والدرجة ومفهوم الحل العام والخاص، وتطبيقها فيزيائيا كمعادلات حرارة وقوانين حركة، ووضعها في منحنيات ومناقشتها من خلال نماذج رياضية، باستخدام الشروط الابتدائية في حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.

المراجع:

[1] . أ. د. عبد الشافي فهمي عبادة، أ. د حسن مصطفى العويضي، أ. د عقاق أبو الفتوح صالح، 2010، المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها، دار الفكر العربي، القاهرة.

[2] أ. د حسن مصطفى العويضي، د. عبد الوهاب عباس رجب، د. سناء علي زارع، 2006، المعادلات التفاضلية، الجزء الأول، مكتبة الرشد.

[3] تأليف سول وايد، ترجمة. د. شاكر جابر شاكر، د. خليل إبراهيم سعيد، د. يوسف مولود حسن، د. عماد ممدوح 1989، مقدمة في الطاقة الشمسية، دار النشر الموصل، الجمهورية العراقية.

[4] . د. إسماعيل بوقفة، د. عايش الهنادوة، 1999، المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقاتها، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الجمهورية اليمنية، الطبعة الأولى.

[5] . د. إسماعيل بوقفة، د. عايش الهنادوة، 1999، المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقاتها، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الجمهورية اليمنية، الطبعة الأولى.

[6] . د. رزحي إبراهيم الخطيب، 2012، مقدمة في المعادلات التفاضلية، دار المسيرة للنشر والطباعة، عمان.

[7] . موراى. ر. شبيحل، 1991، الرياضيات المتقدمة للمهندسين والمعلمين، الدار الدولية للنشر والتوزيع، لبنان.

[8] صلاح علي مبخوت، 2009، المعادلات التفاضلية جامعة ذمار اليمن، عبادي للدراسات والنشر.

[9] تأليف ا تيخونوف وا سامارسكي، ترجمة، د. محمد الصادق القرماني، 1984، معادلات الفيزياء الرياضية، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفياتي، موسكو.

[10] Gabriel Nagy, 2021, Ordinary Differential Equations, Michigan State University.

[11] Gede Pramudya, Universiti Tun Hussein, 2016, Introduction to Differential equations. .

[12] MSc. Graduate Seminar, Mersha Amdie fndale, 2015, Some Applications of first order equations to Real, Harmaya University.

[13] K. F. Riiey, M. P. Hobson and S. J Bence, 2002, Mathematical methods for physics and engineering, Cambridge University Press.

[14] Richard C Diprima and William E. Boyce, John Wiley & Sons, 2021, Elementary Differential Equations and Boundary value problems.